Δίνεται η απεικόνιση $\|\bar{x}\|_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, με τύπο

$\|\bar{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, \ \forall \ \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Να δειχθεί ότι η $\|\bar{x}\|_\infty$ αποτελεί νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ (∞-άπειρο νόρμα).

// Έστω $M_x = |x_m| = \max\{|x_1|, \dots, |x_m|, \dots, |x_n|\}$, για τυχαίο $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

Είναι:

$$\|\bar{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_m|, \dots, |x_n|\} = M_x = |x_m| \geq 0$$

Αφού $\bar{x}$ τυχαίο, θα είναι $\|\bar{x}\|_\infty \geq 0, \ \forall \ \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ (1)

Έστω $\alpha \in \mathbb{R}, \ \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ (τυχαία)

Είναι:

$$\|\alpha\bar{x}\|_\infty = \|\alpha(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \|(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)\| := \max\{|\alpha x_1|, \dots, |\alpha x_n|\}$$

$$= \max\{|\alpha||x_1|, \dots, |\alpha||x_n|\} = |\alpha| \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = |\alpha| \|\bar{x}\|_\infty \quad (2)$$

Έστω $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ (τυχαία)

Είναι:

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_\infty = \|(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\|_\infty = \|(x_1+y_1), \dots, (x_n+y_n)\|_\infty$$

$$:= \max\{|x_1+y_1|, \dots, |x_n+y_n|\} = \underset{(i=1,\dots,n)}{|x_i + y_i|} \geq 0$$

Ακόμη: $\|\underbrace{\bar{x}+\bar{y}}_{\geq 0}\|_\infty^2 = \|\bar{x}\|_\infty^2 + 2\bar{x}\cdot\bar{y} + \|\bar{y}\|_\infty^2 \leq \|\bar{x}\|_\infty^2 + 2|\bar{x}\cdot\bar{y}| + \|\bar{y}\|_\infty^2$

$\overset{C.S}{\leq} \|\bar{x}\|_\infty^2 + 2\|\bar{x}\|_\infty\|\bar{y}\|_\infty + \|\bar{y}\|_\infty^2 = (\underbrace{\|\bar{x}\|_\infty}_{\geq 0} + \underbrace{\|y\|_\infty}_{\geq 0})^2$, άρα λόγω των

μη αρνητικών ποσοτήτων θα είναι

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_\infty \leq \|\bar{x}\|_\infty + \|\bar{y}\|_\infty \quad (3)$$

Από σχέσεις (1), (2), (3) η $\|\bar{x}\|_\infty$ αποτελεί νόρμα στον $\mathbb{R}^n$

Δίνεται η απεικόνιση $\|\bar{x}\|_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, με τύπο

$$\|\bar{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i| \,,\ \forall\ \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Να δειχθεί ότι η $\|\bar{x}\|_1$ αποτελεί νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ (1-νόρμα)

//

Έστω $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ (τυχαίο).
Είναι:

$$\|\bar{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \underbrace{|x_1|}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{|x_n|}_{\geq 0} \geq 0 \text{, άρα } \|\bar{x}\|_1 \geq 0, \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ (τυχαία)
Είναι:

$$\|\alpha\bar{x}\|_1 = \|\alpha(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = \|(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\alpha||x_i| = |\alpha| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\alpha|\|\bar{x}\|_1 \quad (2)$$

Έστω $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ (τυχαία)
Είναι:

$$\|\bar{x}+\bar{y}\|_1 = \|(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)\|_1 = \|(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)\|_1$$

$$:= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| = \underbrace{|x_1+y_1|}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{|x_n+y_n|}_{\geq 0} \geq 0$$

Ακόμη: $\|\bar{x}+\bar{y}\|_1^2 = \|\bar{x}\|_1^2 + 2\,\bar{x}\cdot\bar{y} + \|\bar{y}\|_1^2 \leq \|\bar{x}\|_1^2 + 2|\bar{x}\cdot\bar{y}| + \|\bar{y}\|_1^2$

$\overset{CS}{\leq} \|\bar{x}\|_1^2 + 2\|\bar{x}\|_1\|\bar{y}\|_1 + \|\bar{y}\|_1^2 = (\underbrace{\|\bar{x}\|_1}_{\geq 0} + \underbrace{\|\bar{y}\|_1}_{\geq 0})^2$, άρα λόγω των

μη αρνητικών ποσοτήτων θα είναι:

$$\|\bar{x}+\bar{y}\|_1 \leq \|\bar{x}\|_1 + \|\bar{y}\|_1 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) η $\|\bar{x}\|_1$ αποτελεί νόρμα στον $\mathbb{R}^n$

• Δίνονται οι συγκλίνουσες ακολουθίες:

$$(\bar{X}_\nu) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{X}_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (\bar{y}_\nu) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$(\alpha_\nu) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \alpha \in \mathbb{R}, \quad (b_\nu) \subset \mathbb{R} \longrightarrow b \in \mathbb{R}$$

Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(\alpha_\nu \bar{X}_\nu + b_\nu \bar{y}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ είναι συγκλίνουσα με όριο το διάνυσμα $\alpha \bar{X}_0 + b\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$

//

Έστω $(\bar{X}_\nu), (\bar{Y}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ συγκλίνουσες στα $\bar{X}_0$ και $\bar{Y}_0$ αντίστοιχα

(1)

$(\bar{X}_\nu) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{X}_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon \ \|\bar{X}_\nu - \bar{X}_0\| < \varepsilon$

Για $\frac{\varepsilon}{2} > 0 \ \exists n_1 \ \forall n \geq n_1 \ \|\bar{X}_\nu - \bar{X}_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$(\bar{Y}_\nu) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{Y}_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon \ \|\bar{Y}_\nu - \bar{Y}_0\| < \varepsilon$

Για $\frac{\varepsilon}{2} > 0 \ \exists n_2 \ \forall n \geq n_2 \ \|\bar{Y}_\nu - \bar{Y}_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$

Για $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ $\|\bar{X}_\nu - \bar{X}_0\| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \|\bar{Y}_\nu - \bar{Y}_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$, οπότε

$\|(\bar{X}_\nu + \bar{Y}_\nu) - (\bar{X}_0 + \bar{Y}_0)\| = \|(\bar{X}_\nu - \bar{X}_0) + (\bar{Y}_\nu - \bar{Y}_0)\|$

$\leq \|\bar{X}_\nu - \bar{X}_0\| + \|\bar{Y}_\nu - \bar{Y}_0\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \iff (\bar{X}_\nu + \bar{Y}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$

συγκλίνει, με όριο το διάνυσμα $\bar{X}_0 + \bar{Y}_0 \in \mathbb{R}^n$

Για την ακολουθία $(\alpha_\nu \bar{X}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$, είναι:

$\|\alpha_\nu \bar{X}_\nu - \alpha \bar{X}_0\| = \|\alpha_\nu \bar{X}_\nu - \alpha \bar{X}_0 + \alpha \bar{X}_\nu - \alpha \bar{X}_\nu\| = \|\bar{X}_\nu(\alpha_\nu - \alpha) + \alpha(\bar{X}_\nu - \bar{X}_0)\|$

$\leq \underbrace{\|\bar{X}_\nu\|}_{\text{φραγμένη ως συγκλίνουσα}} \underbrace{|\alpha_\nu - \alpha|}_{\text{μηδενική}} + \underbrace{|\alpha|}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\|\bar{X}_\nu - \bar{X}_0\|}_{\text{μηδενική}}$, άρα $(\alpha_\nu \bar{X}_\nu - \alpha \bar{X}_0) \longrightarrow 0 \iff$

$(\alpha_\nu \bar{X}_\nu) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \alpha \bar{X}_0$ (2)

Για την ακολουθία $(b_\nu \bar{y}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$, ομοίως έχω $(b_\nu \bar{y}_\nu) \to b\bar{y}_0$ (3)

Από (1), (2), (3) η ακολουθία $(\alpha_\nu \bar{x}_\nu + b_\nu \bar{y}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ είναι συγκλίνουσα με όριο το διάνυσμα $\alpha\bar{x}_0 + b\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$